

Fixed-time Attitude Control for Rigid Spacecraft with External Disturbances

Boyan Jiang^{1,2}, Zhuo Chen¹, Qinglei Hu¹, and Juntong Qi³

¹⁾ School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang, China

²⁾ College of Aeronautical Automation, Civil Aviation University of China, Tianjin, China

³⁾ State Key Laboratory of Robotics, Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang, China

Abstract—In this paper, a finite-time control method based on fixed-time is developed for attitude stabilization of a rigid spacecraft with external disturbances. In comparison with the existing finite-time techniques based on terminal sliding mode, of which the initial value of system states must be known when estimating the settling time, the proposed fixed-time based sliding mode controller can not only stabilize the attitude faster, but also eliminate the need of the knowledge of the initial condition to estimate the time of the reaching and the sliding phase. Moreover, if the initial condition is known, the expression of a more accurate settling time is also given in this paper. Finally, the attitude stabilizing performance of the controller is evaluated through a numerical example and the results show that the closed-loop system is robust to external disturbances and initial conditions

Keywords—Spacecraft, Fixed-time control, attitude control, finite time control.

有扰情况下航天器姿态的固定时间控制方法

姜博严^{1,2} 陈卓¹ 胡庆雷¹ 齐俊桐³

¹⁾ 哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨, 黑龙江, 中国

²⁾ 中国民航大学航空自动化学院, 天津, 中国

³⁾ 中国科学院沈阳自动化研究所机器人学国家重点实验室, 沈阳, 辽宁, 中国

摘要 针对受干扰的航天器姿态稳定控制问题, 给出一种基于固定时间概念的有限时间控制方法使姿态快速收敛到平衡点。已有的基于终端滑模的有限时间控制方法, 其估计的收敛时间都依赖于系统状态的初值, 而本文基于固定时间设计的滑模面和趋近律, 不仅使系统具有更快的收敛速度, 且在不知道状态初值的情况下亦可估算出系统状态到达滑模面的时间和在滑模面上滑动的时间。而当状态初值已知时, 本文亦给出了更为精确收敛时间的估算方法。最后, 将设计的固定时间控制器应用于航天器姿态稳定控制, 仿真结果表明该控制器能有效抑制外部干扰, 且对状态初值具有很强的鲁棒性。

关键词 航天器, 固定时间控制, 姿态控制, 有限时间控制

1. 引言

航天器姿态控制系统是一个多输入多输出的耦合非线性系统, 其控制效果的好坏对航天器总体设计至关重要。近年来很多学者对航天器姿态控制问题进行了大量的研究, 许多非线性控制方法在这一领域内取得一些成果, 如滑模控制^[1-2], 鲁棒控制^[3-4], 自适应控制^[5-6]等。

实际运行的航天器受到诸如重力梯度力矩, 太阳光压力矩, 气动力矩等外力干扰, 因此研究有扰情况下的航天器姿态控制问题同时具有理论价值和工程意义。文献[7]针对受重力梯度干扰的卫星姿态控制问题, 设计了饱和控制器, 但其考虑的干扰不具有一般性。文献[8]用自适应的方法估计干扰上界, 结合滑模控制方法设计的控制器具有很强的抗干扰能力。文献[9]针对姿态控制问题设计了干扰

*此项工作得到国家自然科学基金(61004072, 61273175); 教育部新世纪优秀人才计划(NCET-11-0801); 黑龙江青年基金(QC2012C024); 机器人学国家重点实验室开放课题基金(2013-O11)

观测器，该方法的优点是不需要高的控制器增益就可以克服外界干扰。

虽然抗干扰的姿态控制器已经取得了很多成果，但以上文献中的控制方法都是无限时间收敛的，显然有限时间姿态控制器具有更快的收敛速度和更好的鲁棒性。目前研究有限时间的方法可分为两种：齐次性定理^[10-11]和有限时间 Lyapunov 定理^[12]，其中后一种方法因其适用于受扰系统或不确定性系统而且能估计系统的收敛时间，成为近年来研究的热点，并在姿态控制上取得了一些成果。文献[13]和文献[14]针对受扰动的航天器，分别设计了有限时间容错控制器和有限时间饱和控制器。

终端滑模控制^[15-16]是有限时间 Lyapunov 稳定方法的重要分支，基于终端滑模设计的控制器即能保证有限时间收敛亦继承了滑模鲁棒性强的优点。然而现存有限时间技术估计收敛时间的方法都需要预先知道系统的初值，而基于终端滑模的方法不仅需要初值信息，还需要知道系统到达滑模面时的状态信息，这对于设计者是很难知道的，固定时间控制方法^[17]与现存有限时间控制方法相比，因其不需要知道系统初值状态信息，亦能保守的估计系统的收敛时间，所以对固定时间控制方法的研究是很有必要的。

在上述研究的基础上，本文研究航天器姿态固定时间收敛问题。首先设计了固定时间滑模面，相比于传统的终端滑模面，即使在不知道系统到达滑模面时的状态亦可估算系统滑动时间。然后设计了固定时间控制器保证系统能在固定时间内到达滑模面上，并给出了理论证明和仿真验证。

2. 预备知识

2.1 航天器姿态跟踪运动模型

考虑一类刚体航天器，其姿态动力学方程为^[18]：

$$J\dot{\omega} = -\omega^\times J\omega + \tau + d \quad (1)$$

其中 $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 为正定对称的转动惯量矩阵， $\omega \in \mathbb{R}^3$ 表示航天器本体坐标系相对惯性坐标系在本体坐标系的角速度， $\tau \in \mathbb{R}^3$ 为控制力矩， $d \in \mathbb{R}^3$ 为航天器受到的干扰力矩。对任一向量 $a = [a_1, a_2, a_3]^\top$ ， a^\times 定义为： $a^\times = [0, -a_3, a_2; a_3, 0, -a_1; -a_2, a_1, 0]$ 。

基于四元数的航天器运动学方程可描述为^[18]：

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2}q^\top \omega, \quad \dot{q} = Q(q)\omega \quad (2)$$

其中 $[q_0, q^\top]^\top \in \mathbb{R}^4$ 表示航天器姿态四元数，且有 $Q(q) = \frac{1}{2}(q_0 I + q^\times)$ ， $q_0^2 + q^\top q = 1$ 。

2.2 定理和引理

定义 1^[10] 考虑如下非线性系统：

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = 0, \quad f(0) = 0 \quad (3)$$

其中， $x \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态变量， $f(x(t))$ 为非线性连续函数。如果系统(3)是 Lyapunov 稳定的，且存在时间函数 $T(x)$ 使得对于所有 $t \geq T(x)$ 的 $x(t) = 0$ 恒成立，则称系统(3)是有限时间稳定的。

定义 2^[17] 如果系统(3)是有限时间稳定的，且该系统收敛时间有上界，其界值与状态变量 x 值无关，则称系统(3)是固定时间稳定的。

注 1 系统 $\dot{x} = -x^{0.5}$ ， $x \in \mathbb{R}$ ，是有限时间收敛的，其收敛时间为 $T(x_0) = 1.5|x_0|^{2/3}$ 。然而系统 $\dot{x} = -x^{0.5} - x^2$ 是固定时间收敛的，即对任意系统初始状态 $x_0 \in \mathbb{R}$ ，存在 $\forall t \geq 3$ ，使 $x(t, x_0) = 0$ 。也就是说固定时间稳定的系统，其收敛时间有上限，且其上限值和系统状态无关。

引理 1^[17] 对定义 1 描述的非线性系统，假设存在一个连续可微的正定函数 $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ， $\alpha, \beta, p, g, k \in \mathbb{R}^+$ ， $pk < 1$ 和 $gk > 1$ ，以及一个包含平衡点的邻域 $D \in \mathbb{R}^n$ ，使 $V(x)$ 满足： $D^*V(x) \leq -(\alpha V(x)^p + \beta V(x)^g)^k$ 或者 $\dot{V}(x) \leq -(\alpha V(x)^p + \beta V(x)^g)^k$ ，则任一从 $D \in \mathbb{R}^n$ 开始的函数 $V(x)$ 在固定时间 T 内都能到达 $V(x) = 0$ ，即系统是固定时间稳定的，且其收敛时间为：

$$T \leq \frac{1}{\alpha^k(1-pk)} + \frac{1}{\beta^k(gk-1)} \quad (4)$$

其中函数 $D^*V(x)$ 为 $V(x)$ 的右导数，定义为

$$D^*V(x(t)) := \limsup_{h \rightarrow +0} \{ [V(x(t+h)) - V(x(t))] / h \}。$$

注 2 如果已知引理 1 中 $V(x)$ 的初始值 $V(x_0)$ ，则可以更精确的估计其收敛时间 T ，且

$$T \leq \frac{1}{\alpha^k(1-kp)} |V(x_0)|^{1-kp} \bar{F} \left(k, \frac{1-kp}{g-p}, 1 + \frac{1-kp}{g-p}, -\frac{\beta}{\alpha} |V(x_0)|^{g-p} \right) \quad (5)$$

其中 $\bar{F}(A, B, C, z)$ 为高斯超几何函数^[19]，其定义如下：

$$\bar{F}(A, B, C, z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A)_k (B)_k}{(C)_k k!} z^k \quad (6)$$

如果 A, B, C 为正实数，且 C-A-B > 0，则 $\bar{F}(A, B, C, z)$ 在 $z < 0$ 定义域上收敛。

引理 2^[15] 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ ， $a \in \mathbb{R}$ ，有如下运算成立：

$$\frac{d|x|^{a+1}}{dt} = (a+1) \text{diag}(\text{sig}(x)^a) \dot{x} \quad (7)$$

$$\frac{d \text{sig}(x)^{a+1}}{dt} = (a+1) \text{diag}(|x|^a) \dot{x} \quad (8)$$

定义 3 对 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ 定义如下函数：
 $\mathbf{x}^\alpha = [x_1^\alpha, x_2^\alpha, x_3^\alpha]^T$, $\text{sgn}(\mathbf{x}) = [\text{sgn}(x_1), \text{sgn}(x_2), \text{sgn}(x_3)]^T$,
 $\text{sig}(\mathbf{x})^\alpha = [|x_1|^\alpha \text{sgn}(x_1) \ |x_2|^\alpha \text{sgn}(x_2) \ |x_3|^\alpha \text{sgn}(x_3)]^T$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数。

3. 固定时间滑模面和控制器的设计

3.1. 固定时间滑模面设计

文献[20]和文献[21]分别设计了如下终端滑模面(TSM)和快速终端滑模面(FTSM)

$$s_1 = \dot{x} + \alpha \text{sig}(x)^p = 0, \quad \alpha > 0, \quad 0 < p < 1 \quad (9)$$

$$s_2 = \dot{x} + \alpha \text{sig}(x)^p + \beta x = 0, \quad a, \beta > 0, \quad 0 < p < 1 \quad (10)$$

在上述研究基础上设计固定时间滑模(Fixed-time based SM)如下

$$s_3 = \dot{x} + \text{sig}(\text{sig}(\dot{x})^2 + \alpha x + \beta x^3)^{0.5} = 0, \quad a, \beta > 0 \quad (11)$$

定理 1 对定义 1 描述的非线性系统, 如选取滑模面(11)设计控制器, 当系统状态稳定在滑模面之后将会在固定时间 T_x 内滑动到 $\mathbf{x} = 0$, T_x 如下

$$T_x \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \quad (12)$$

证明 当 $s_3 = 0$ 时对式(11)变换得

$$\dot{x} = -\text{sign}(x) \left(0.5\alpha|x| + 0.5\beta|x|^3 \right)^{0.5} \quad (13)$$

选取 Lyapunov 函数 $V_x = |x|$, 对其求导并代入式(13)得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= \text{sign}(x)\dot{x} = -\left(0.5\alpha|x| + 0.5\beta|x|^3 \right)^{0.5} \\ &= -\left(0.5\alpha_1 V_x + 0.5\beta_1 V_x^3 \right)^{0.5} \end{aligned} \quad (14)$$

由引理 1 得系统到达滑模面后收敛到 $x = 0$ 的时间为

$$T_x \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} . \text{证毕。}$$

注 3 选取如下 TSM, FTSM 和 Fixed-time based SM 进行仿真比较。

$$s_1 = \dot{x} + 0.5 \text{sig}(x)^{0.5} = 0$$

$$s_2 = \dot{x} + 0.5 \text{sig}(x)^{0.5} + 0.5x = 0$$

$$s_3 = \dot{x} + \text{sig}(\text{sig}(\dot{x})^2 + 2x + 2x^3)^{0.5} = 0$$

从图 1 可以看出无论状态初值为多少, 固定时间滑模面上的状态都能在 4s 内收敛到 0, 这不仅说明固定时间滑模的收敛时间上界与其状态初值无关, 也说明固定时间滑模具有更快的收敛速度。

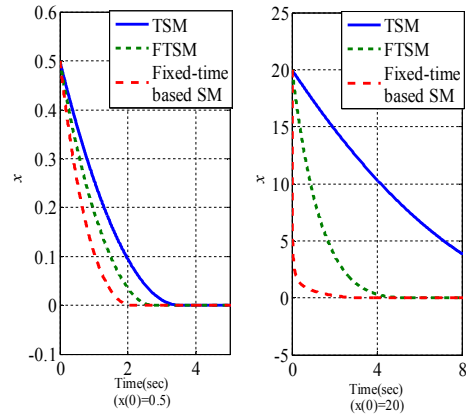


图 1 三种滑模面收敛时间对比

3.2. 固定时间控制器设计

根据式(1)把航天器姿态动力学模型写为如下拉格朗日形式

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}^* \quad (15)$$

其中 $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = -\mathbf{Q}\dot{\mathbf{P}}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}})^\times \mathbf{J}\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{q})$, $\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q}\mathbf{J}^{-1}$ 和 $\mathbf{d}^* = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{d}$.

假设 1 航天器转动惯量 $\|\mathbf{J}\|$ 为有界常数, 航天器所受干扰有界, 即 $\|\mathbf{d}^*\| \leq \bar{d}$, 其中干扰上界 \bar{d} 已知。

则固定时间姿态稳定问题可描述如下: 针对式(2)和式(15)描述的航天器姿态运动模型, 设计一类控制器, 使系统状态在固定时间内收敛到平衡点, 即满足 $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{0}$, 且该固定时间不依赖于系统状态。

首先根据式(11)引入如下固定时间滑模面:

$$\mathbf{S} = \dot{\mathbf{q}} + \text{sig}(\text{sig}(\dot{\mathbf{q}})^2 + \alpha_1 \mathbf{q} + \beta_1 \mathbf{q}^3)^{0.5} \quad (16)$$

其中 $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}^+$ 为滑模面参数。由定理 1 可知当系统状态到达滑模面之后, 将在固定时间 T_q 内收敛到 0, T_q 值将会在下文给出。

其次构造如下固定时间控制律:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= -\mathbf{G}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{G}(\mathbf{q})^{-1} \bar{d} \text{sign}(\mathbf{S}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{G}(\mathbf{q})^{-1} [\alpha_1 \mathbf{q}_i + 3\beta_1 \text{diag}(\mathbf{q}_i^3)] \text{sign}(\mathbf{S}) \\ &\quad - \mathbf{G}(\mathbf{q})^{-1} \text{sig}(\alpha_2 \mathbf{S}_1 + \beta_2 \text{sig}(\mathbf{S})^3)^{0.5} \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}^+$ 为待设计的控制器参数。

至此, 给出如下固定时间定理:

定理 2 对于式(2)与式(15)描述的航天器姿态运动模型, 设计固定时间滑模(16)和控制律(17), 则系统状态从任意初值在固定时间 T_s 内到达滑模面之后, 又会在固定时间

T_q 内滑动到平衡点，即航天器姿态在固定时间 $T = T_s + T_q$ 内稳定，且 T 与初值无关。且

$$T = T_s + T_q \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha_2}} + \frac{2}{\sqrt{\beta_2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta_1}} \quad (18)$$

证明： 系统状态的到达阶段和滑行阶段分开证明

Step 1 到达阶段。 考虑 Lyapunov 函数 $V_{s_i} = |S_i|$ ，并对其求导得：

$$\begin{aligned} D^* |S| &= \text{diag}(\text{sign}(\mathbf{S})) \left\{ \ddot{\mathbf{q}} + 0.5 \text{diag} \left(\left| \mathbf{q}^2 + \alpha_1 \mathbf{q} + \beta_1 \mathbf{q}^3 \right|^{0.5} \right) \right. \\ &\quad \left. \left[2 \text{diag}(\dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \alpha_1 \dot{\mathbf{q}} + 3\beta_1 \text{diag}(\mathbf{q}^2) \dot{\mathbf{q}} \right] \right\} \\ &= \text{diag}(\text{sign}(\mathbf{S})) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \text{diag}(\text{sign}(\mathbf{S})) \text{diag} \left(\left| \mathbf{q}^2 + \alpha_1 \mathbf{q} + \beta_1 \mathbf{q}^3 \right|^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\left[2 \text{diag}(\dot{\mathbf{q}}) + (\alpha_1 I_3 + 3\beta_1 \text{diag}(\mathbf{q}^2)) \text{diag}(\text{sign}(\dot{\mathbf{q}})) \right] \dot{\mathbf{q}}$$

把控制律代入式(15)得：

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} &= -\bar{d} \text{sign}(\mathbf{S}_1) + \mathbf{d}^* - \frac{1}{2} \left[\alpha_1 I_3 + 3\beta_1 \text{diag}(\mathbf{q}^2) \right] \\ &\quad \text{sign}(\mathbf{S}_1) - \text{sig} \left[\alpha_2 \mathbf{S}_1 + \beta_2 \text{sig}(\mathbf{S}_1)^3 \right]^{0.5} \end{aligned} \quad (20)$$

再把式(20)代入式(19)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{s_i} &= -(\bar{d} - \|\mathbf{d}^*\|) - \frac{1}{2} \left[\alpha_1 + 3\beta_1 q_i^2 \right] - (\alpha_2 |S_i| + \beta_2 |S_i|^3)^{0.5} \\ &\quad + |q_i^2 + \alpha_1 q_i + \beta_1 q_i^3|^{0.5} \left[-(\bar{d} - \|\mathbf{d}^*\|) - \frac{1}{2} (\alpha_1 + 3\beta_1 q_i^2) \right. \\ &\quad \left. - (\alpha_2 |S_i| + \beta_2 |S_i|^3)^{0.5} + \frac{1}{2} (\alpha_1 + 3\beta_1 q_i^2) \text{sign}(S_i) \text{sign}(\dot{q}_i) \right] |\dot{q}_i| \\ &\leq -(\alpha_2 V_{s_i} + \beta_2 V_{s_i}^3)^{0.5} \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (21)$$

由引理 1 可知系统状态将会在固定时间 T_s 内到达滑模面，且

$$T_s \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha_2}} + \frac{2}{\sqrt{\beta_2}} \quad (22)$$

Step 2 滑行阶段。 选取如下 Lyapunov 函数 $V_{q_i} = |q_i|$

当系统状态保持在滑模面时，恒有 $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ ，则由式(16)可得：

$$\dot{q}_i = -\text{sign}(q_i) \left(\frac{1}{2} \alpha_1 |q_i| + \frac{1}{2} \beta_1 |q_i|^3 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

对 V_{q_i} 求导，并代入式(23)得

$$\dot{V}_{q_i} = \text{sign}(q_i) \dot{q}_i = - \left(\frac{1}{2} \alpha_1 V_{q_i} + \frac{1}{2} \beta_1 V_{q_i}^3 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

则由引理 1 可知系统状态在到达滑模面后会在固定时间 T_q 内到达平衡点，且

$$T_q \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta_1}} \quad (25)$$

结合式(22)和式(25)可得系统状态从任何初值收敛到平衡点的固定时间为：

$$T = T_s + T_q \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha_2}} + \frac{2}{\sqrt{\beta_2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta_1}}$$

定理 2 证毕。

注 4 虽然系统状态收敛时间(18)的表达式与系统初值无关，但式(18)只是提供一种不需要知道初值时估计系统状态收敛时间的方法，如果初值已知，则可以更为精确的估算收敛时间如下：

根据注 2 和式(21)，(22)可以更精确的表示成

$$T_s \leq \max \left\{ \frac{2}{\sqrt{\alpha_2}} |V_{s_{i0}}|^{\frac{1}{2}} \bar{F} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{\beta_2}{\alpha_2} |V_{s_{i0}}|^2 \right) \right\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (26)$$

同理，式(25)可以表示成

$$T_q \leq \max \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha_1}} |V_{q_{i0}}|^{\frac{1}{2}} \bar{F} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{\beta_1}{\alpha_1} |V_{q_{i0}}|^2 \right) \right\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (27)$$

其中， $V_{s_{i0}}$ 为 V_{s_i} 的初始值， $V_{q_{i0}}$ 为 V_{q_i} 的初始值。

结合式(26)和式(27)，式(18)表示的固定时间可以改写为

$$\begin{aligned} T &= T_s + T_q \\ &\leq \max \left\{ \frac{2}{\sqrt{\alpha_2}} |V_{s_{i0}}|^{\frac{1}{2}} \bar{F} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{\beta_2}{\alpha_2} |V_{s_{i0}}|^2 \right) \right\} \\ &\quad + \max \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha_1}} |V_{q_{i0}}|^{\frac{1}{2}} \bar{F} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{\beta_1}{\alpha_1} |V_{q_{i0}}|^2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

4. 仿真结果与分析

为了验证本文控制器的有效性，利用 matlab/simulink 对航天器姿态稳定进行仿真，并把本文设计的固定时间控制器和文献[22]中的有限时间控制器进行对比。仿真中的航天器转动惯量选取如下：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 20 & 1.2 & 0.9 \\ 1.2 & 17 & 1.4 \\ 0.9 & 1.4 & 15 \end{bmatrix} \text{kg} \cdot \text{m}^2, \quad \text{姿态的初值设为}$$

$[q_0, \mathbf{q}^T]^T = [0.6, 0.4, -0.2, 0.6633]^T$ ，角速度初始为 $\boldsymbol{\omega}(0) = [0.1, 0.2, 0.3]^T$ 。控制器参数选择见表 1。

表 1 控制器参数

控制器	控制器参数
控制器(17)	$\alpha_1 = \beta_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.01, \beta_2 = 0.05$
控制器[22]	$k_1 = 5, k_2 = 0.75, p = 1.3$

注 5 为避免系统出现抖震，用

$$\text{sat}(s, \Delta) = \begin{cases} s / \varepsilon_1, & |s| < \varepsilon_1 \\ \text{sgn}(s), & |s| > \varepsilon_1 \end{cases}$$

代替控制律中出现的符号函数 $\text{sgn}(s)$ ，再用 $\frac{s}{\|s\| + \varepsilon_1}$ 代替 $\frac{s}{\|s\|}$ ，其中 ε_1 为一很小的正常数。

仿真 1 干扰力矩取为：

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3\cos(0.2t) + 1 \\ 1.5\sin(0.2t) + 3\cos(0.2t) + 2 \\ 3\sin(0.2t) + 3 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \text{Nm}, \text{ 仿真结果}$$

如图 2~4 所示。从图 2 和图 3 可以得知固定时间控制器(17)的收敛时间为 10 秒，而有限时间控制器[22]的收敛时间将近 20 秒。图 4 为控制力矩变化曲线，从图中可知两个控制器的最大幅值都接近 10Nm。通过仿真 1 可知在最大控制力矩相同的情况下，固定时间控制具有更快的收敛速度。

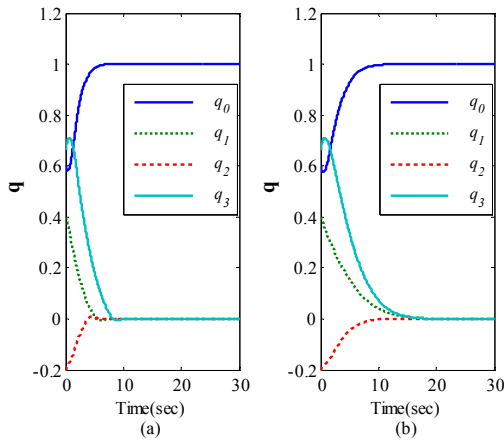


图 2 姿态四元数: (a) 固定时间控制(17); (b) 有限时间控制[22]

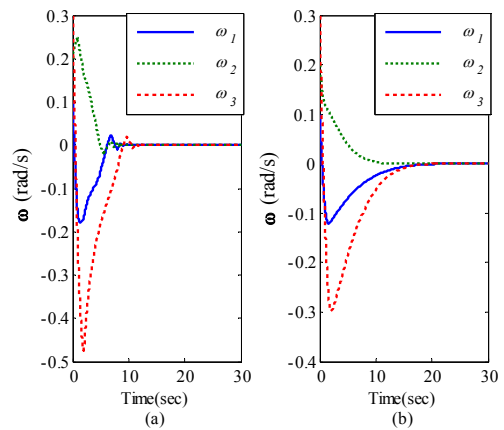


图 3 角速度: (a) 固定时间控制(17); (b) 有限时间控制[22]

仿真 2 为了比较强干扰情况下两个控制器的抗干扰能力，本节的干扰力矩取为：

$$\mathbf{d} = 0.5 \times \begin{bmatrix} 3\cos(0.2t) + 1 \\ 1.5\sin(0.2t) + 3\cos(0.2t) + 2 \\ 3\sin(0.2t) + 3 \end{bmatrix} \text{Nm}, \text{ 仿真结果如}$$

图 2~4 所示。从图 5 和图 6 可以得知固定时间控制器(17)的收敛时间为 10 秒，而有限时间控制器[22]的收敛效果很差，甚至不能收敛到 0。图 7 为控制力矩变化曲线，可知两个控制器的最大幅值依然接近于 10Nm。仿真 2 说明当干扰大幅度增大之后，本文设计的固定时间控制器具有较强的抗干扰能力，而有限时间控制器性能大幅度下降。

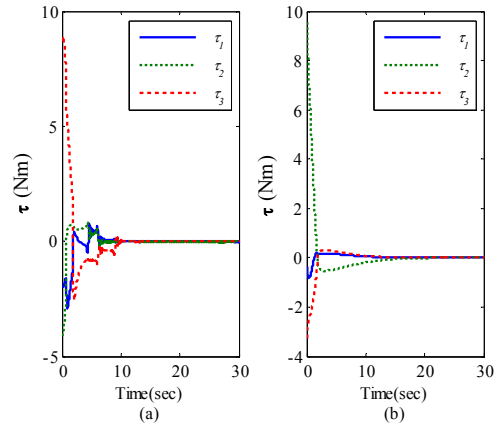


图 4 控制力矩: (a) 固定时间控制(17); (b) 有限时间控制[22]

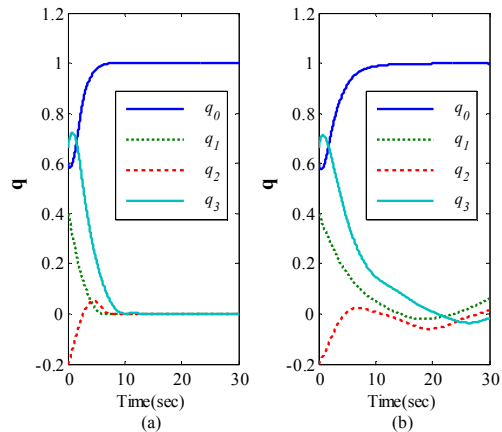


图 5 姿态四元数: (a) 固定时间控制(17); (b) 有限时间控制[22]

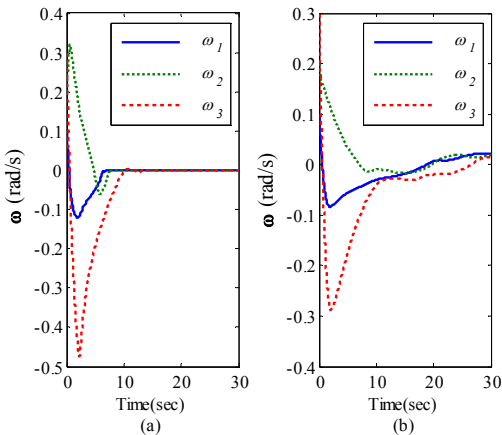


图 6 角速度: (a) 固定时间控制(17); (b) 有限时间控制[22]

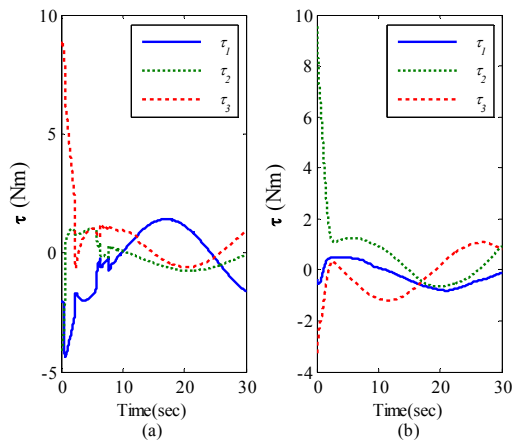


图7 控制力矩: (a) 固定时间控制(17); (b) 有限时间控制 [22]

仿真1和仿真2两组实验说明相比于有限时间控制器[22],本文设计的固定时间控制器(17)具有更快的收敛速度,且具有更强的抗干扰能力。

5. 结论

本文在现有有限时间控制技术的基础上,针对现存估计系统收敛时间方法依赖系统初始信息这一问题,提出一类收敛时间上界不依赖于系统初始信息的控制器,即为固定时间控制器。并结合在轨受扰动的航天器姿态控制系统,设计的固定时间控制器具有很好的抗干扰能力,快速的完成姿态稳定任务。并给出了系统的稳定性证明,仿真亦说明了本文方法的有效性。

参考文献

- [1] Q. Hu, G. Ma, "Variable Structure Control and Active Vibration Suppression of Flexible Spacecraft During Attitude Maneuver," *Aerospace Science and Technology*, 2005, 9(4): 307-317.
- [2] S. Lo, Y. Chen, "Smooth Sliding-mode Control for Spacecraft Attitude Tracking Maneuvers," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1995, 18(6): 1345-1349.
- [3] W. Luo, Y. C. Chu, K. V. Ling, "Inverse Optimal Adaptive Control for Attitude Tracking of Spacecraft," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1639-1654.
- [4] W. C. Luo, Y. C. Chu, K. V. Ling, "H-infinity Inverse Optimal Attitude Tracking Control of Rigid Spacecraft," *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2005, 28(3): 481-493.
- [5] D. Seo, M. R. Akella, "High-performance Spacecraft Adaptive Attitude-tracking Control through Attracting-manifold design," *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2008, 31(4): 884-891.
- [6] H. Yoon, B. N. Agrawal, "Adaptive Control of Uncertain Hamiltonian Multi-input Multi-output Systems: with application to spacecraft control," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009, 17(4): 900-906.
- [7] N. Chaturvedi, N. McClamroch, "Almost Global Attitude Stabilization of an Orbiting Satellite Including Gravity Gradient and Control Saturation Effects," *Proceedings of the 2006 American Control Conference*. 2006: 1748-1753.
- [8] Y. Jiang, Q. Hu, G. ma, "Adaptive Backstepping Fault-tolerant Control for Flexible Spacecraft with Unknown Bounded Disturbances and Actuator Failures," *ISA Transactions*, 2010, 49(1):57-69.
- [9] K. Lu, Y. Xia, M. Fu, "Controller Design for Rigid Spacecraft Attitude Tracking with Actuator Saturation," *Information Sciences*, 2013, 220:343-366.
- [10] S. Bhat, D. Bernstein, "Finite-time Stability of Continuous Autonomous Systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751-766.
- [11] S. P. Bhat, D. S. Bernstein, "Geometric Homogeneity with Applications to Finite-time Stability," *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2005, 17(2): pp. 101-127.
- [12] S. P. Bhat, D. S. Bernstein, "Continuous Finite-time Stabilization of the Translational and Rotational Double Integrators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(5): 678-682.
- [13] Q. Hu, X. Huo, B. Xiao, Z. Zhang, "Robust Finite-time Control for Spacecraft Attitude Stabilization under Actuator Fault," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 2012, 226(3): 416-428.
- [14] Q. Hu, X. Huo, B. Xiao, "Reaction Wheel Fault Tolerant Control for Spacecraft Attitude Stabilization with Finite-time Convergence," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013, 23(15): 1737-1752.
- [15] S. Yu, X. Yu, B. Shirinzadeh, Z. Man, "Continuous Finite-time Control for Robotic Manipulators with Terminal Sliding Mode," *Automatica*, 2005, 41(11): 1957-1964.
- [16] K. Lu, Y. Xia, "Finite-time Fault-tolerant Control for Rigid Spacecraft with Actuator Saturations," *IET Control Theory and Applications*, 2013, 7(11): 1529-1539.
- [17] A. Polyakov, "Nonlinear Feedback Design for Fixed-Time Stabilization of Linear Control Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2106-2110.
- [18] J. D. Bokovic, S.-M. Li, R. K. Mehra, "Robust adaptive variable structure control of spacecraft under control input saturation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, 24(1): 14-22.
- [19] M. Abramowitz, A. I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications 1965.
- [20] M. Zhihong, X. H. Yu, "Terminal sliding mode control of MIMO linear systems," *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 1996, 4: 4619-4624.
- [21] A. M. Zou, K. D. Kumar, G. H. Hou, X. Liu, "Finite-Time Attitude Tracking Control for Spacecraft Using Terminal Sliding Mode and Chebyshev Neural Network," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2011, 41(4): 950-963.
- [22] H. Du, S. Li, C. Qian, "Finite-time Attitude Tracking Control of Spacecraft with Application to Attitude Synchronization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(11): 2711-2714.